Opdracht 7a_1

Steekproefgemiddelde

Het aantal ongevallen per week bij een gevaarlijke kruising varieert met het gemiddelde 2.2 en de standaardafwijking 1.4. De verdeling is discreet en dus beslist niet normaal. x_gemiddelde is het gemiddeld aantal ongevallen per week bij die kruising, genomen gedurende een jaar (52 weken). Gebruik de centrale limietstelling om een benadering te bepalen van de kans dat er in een jaar bij die kruising minder dan 100 ongevallen plaatshebben.

Opdracht 7a_1 - berekening en verslag

Het aantal ongevallen per week bij een gevaarlijke kruising varieert met het gemiddelde 2.2 en de standaardafwijking 1.4. De verdeling is discreet en dus beslist niet normaal. x_gemiddelde is het gemiddeld aantal ongevallen per week bij die kruising, genomen gedurende een jaar (52 weken). Gebruik de centrale limietstelling om een benadering te bepalen van de kans dat er in een jaar bij die kruising minder dan 100 ongevallen plaatshebben.

Het gemiddelde x_gemiddelde is gelijk aan het aantal ongevallen per jaar gedeeld door het aantal weken per jaar: 100 / 52 = 1.92. Het gemiddelde x_gemiddelde over 52 weken heeft de standaardafwijking 1.4 / sqrt(52).

We bepalen nu de z-waarde:

$$z = \frac{\text{x\_gemiddelde} - \text{muu}}{\text{sigma} / \text{sqrt}(n)}$$

$$= \frac{1.92 - 2.2}{1.4 / \text{sqrt}(52)}$$

$$= -1.43$$

We willen de kans weten dat er MINDER dan 100 ongevallen plaatshebben. Dan geldt (terwijl we tabel A raadplegen):

P(Z <= -1.43) = 0.0764

De kans dat er in een jaar bij de kruising minder dan 100 ongevallen plaatshebben is gelijk aan 7.64%.

Opdracht 7a_2

Steekproefgemiddelde

Leonie en Fred staan op het punt de universitaire toelatingsexamens af te leggen. Ze zijn overeengekomen dat als een van hen 5 of meer punten hoger scoort dan de ander, de verliezer de ander op een etentje zal trakteren. Ga er vanuit dat de score van Leonie varieert met het gemiddelde 25 en de standaardafwijking 1, en dat de score van Fred varieert met het gemiddelde 23 en standaardafwijking 3. De twee scores zijn onafhankelijk. Wat is de kans dat hun scores in de ene of de andere richting minstens 5 punten verschillen?

Opdracht 7a_2 - berekening en verslag

Leonie en Fred staan op het punt de universitaire toelatingsexamens af te leggen. Ze zijn overeengekomen dat als een van hen 5 of meer punten hoger scoort dan de ander, de verliezer de ander op een etentje zal trakteren. Ga er vanuit dat de score van Leonie varieert met het gemiddelde 25 en de standaardafwijking 1, en dat de score van Fred varieert met het gemiddelde 23 en standaardafwijking 3. De twee scores zijn onafhankelijk. Wat is de kans dat hun scores in de ene of de andere richting minstens 5 punten verschillen?

Noem Leonie X en Fred Y. Het verschil X-Y tussen hun scores is normaal verdeeld, met gemiddelde en variantie

muu_X-Y = muu_X - muu_Y = 25 -23 = 2
variantie_X-Y = variantie_X + variantie_Y = sqr(1) + sqr(3) = 10

Dus:

sigma_X-Y = sqrt(variantie_X-Y) = sqrt(10) = 3.16

We willen de kans berekenen dat hun scores in de ene of de andere richting minstens 5 punten verschillen. Voor het berekenen van P(X-Y<=-5 of X-Y>=5) moeten we de tabel van de standaardnormale verdeling raadplegen.

$$z = \frac{(X-Y) - \text{muu\_X-Y}}{\text{sigma\_X-Y}} = \frac{-5-2}{3.16} = -2.21$$

==> P(X-Y)<=-5) = P(Z<=-2.21) = 0.0136 (Tabel A)

$$z = \frac{(X-Y) - \text{muu\_X-Y}}{\text{sigma\_X-Y}} = \frac{5-2}{3.16} = 0.95$$

==> P(X-Y)>= 5) = P(Z>= 0.95) = P(Z<=-0.95) = 0.1711 (Tabel A)

P(X-Y<=-5 of X-Y>=5) = 0,0136 + 0,1711 = 0,1847

Er is een kans van 18,47% dat de scores van Leonie en Fredt in de ene of de andere richting minstens 5 punten verschillen.

Opdracht 7a_3

Steekproefgemiddelde

Een variabele x is normaal verdeeld met muu_x=250 en sigma_x=20. Van deze variabele doen we 25 waarnemingen.

a. Hoe groot is de kans dat een afzonderlijke waarneming x meer dan 8 afwijkt van 250?

b. Hoe groot is de kans dat het gemiddelde van 25 waarnemingen meer dan 8 afwijkt van 250?

c. Wat is je conclusie naar aanleiding van de uitkomsten van a. en b.?

Opdracht 7a_3 - berekening en verslag

Een variabele x is normaal verdeeld met muu_x=250 en sigma_x=20. Van deze variabele doen we 25 waarnemingen.

a. Hoe groot is de kans dat een afzonderlijke waarneming x meer dan 8 afwijkt van 250?

Als muu_x=250, en we willen letten op een afwijking van 8, dan zijn de grenzen 250-8=242 en 250+8=258. Voor het berekenen van P(X < 242 of X > 258) moeten we de tabel van de standaardnormale verdeling raadplegen.

$$z = \frac{\text{ondergrens - muu\_x}}{\text{sigma\_x}} = \frac{242 - 250}{20} = - 0,4$$

==> P(X < 242) = P(Z <= -0,4) = 0,3446 (Tabel A)

$$z = \frac{\text{bovengrens - muu\_x}}{\text{sigma\_x}} = \frac{258 - 250}{20} = 0,4$$

==> P(X > 258) = P(Z >= 0,4) = P(Z <= -0,4) = 0,3446 (Tabel A)

P(X < 242 of X > 258) = 0,3446 + 0,3446 = 0,6892

De kans dat een afzonderlijke waarneming x meer dan 8 afwijkt van 250 is gelijk aan 68,92%.

b. Hoe groot is de kans dat het gemiddelde van 25 waarnemingen meer dan 8 afwijkt van 250?

Het gemiddelde van 25 waarnemingen met sigma_x=20 heeft nu de volgende verdeling:

N(muu_x,sigma_x_gemiddelde) = N(muu_x,sigma_x/sqrt(n)) =
N(250,20/sqrt(25)) = N(250,4)

$$z = \frac{\text{ondergrens - muu\_x}}{\text{sigma\_x\_gemiddelde}} = \frac{242 - 250}{20/\text{sqrt}(25)} = - 2$$

==> P(X_gemiddelde < 242) = P(Z <= -2) = 0,0228 (Tabel A)

$$z = \frac{\text{bovengrens - muu\_x}}{\text{sigma\_x\_gemiddelde}} = \frac{258 - 250}{20/\text{sqrt}(25)} = 2$$

==> P(X_gemiddelde > 258) = P(Z > 2) = P(Z <= -2) = 0,0228 (Tabel A)

P(X_gemiddelde < 242 of X_gemiddelde > 258) = 0,0228 + 0,0228 = 0,0456

De kans dat het gemiddelde van 25 waarnemingen meer dan 8 afwijkt van 250 is gelijk aan 4,56%.

c. Wat is je conclusie naar aanleiding van de uitkomsten van a. en b.?

We zien dat het gemiddelde van 25 waarnemingen veel dichter in de buurt van muu zal komen te liggen dan een individuele uitkomst x.