Opdracht 10a
----

t-procedures voor gekoppelde paren
t-procedures voor twee onafhankelijke steekproeven
samengestelde t-procedures voor twee onafhankelijke steekproeven

Twee groepen van 10 leraren Frans volgden een intensieve zomercursus Frans. Zowel voor als na de cursus maakten zij een luistertoets. De onderstaande tabel geeft de scores bij de toets vooraf en de toets achteraf.

Groep	Achteraf	Vooraf
1	34	32
1	31	31
1	35	29
1	16	10
1	33	30
1	36	33
1	24	22
1	28	25
1	26	32
1	26	20
2	36	30
2	26	20
2	27	24
2	24	24
2	32	31
2	31	30
2	15	15
2	34	32
2	26	23
2	26	23

Voer de gegevens in in een tabel. Definieer de drie kolommen van de tabel en kies als kolomnamen ’groep’, ’vooraf’ en ’achteraf’.

a. Teken een normaal-kwantiel-plot voor de verschilscores achteraf-vooraf.

b. Geef een 90%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde toename van de score bij de luistertoets, een toename die te danken is aan het bijwonen van de zomercursus. Maak hierbij geen onderscheid tussen groep 1 en groep 2.

c. Is de verbetering in de scores significant? Formuleer de geschikte H_0 en H_a. Maak ook hierbij geen onderscheid tussen groep 1 en groep 2.

d. Teken een normaal-kwantiel-plot voor de scores vooraf van groep 1 en teken een normaal-kwantiel-plot voor de scores vooraf van groep 2.

e. Geef een 90%-betrouwbaarheidsinterval voor het verschil in de gemiddelden van de score ’vooraf’ van groep 1 en de score ’vooraf’ van groep 2. Ga er van uit dat de standaarddeviaties van beide populaties niet gelijk zijn.

f. Is er een significant verschil tussen de gemiddelde score Vooraf van groep 1 en de gemiddelde score Vooraf van groep 2? Formuleer de geschikte H_0 en H_a. Ga er van uit dat de standaarddeviaties van beide populaties niet gelijk zijn.

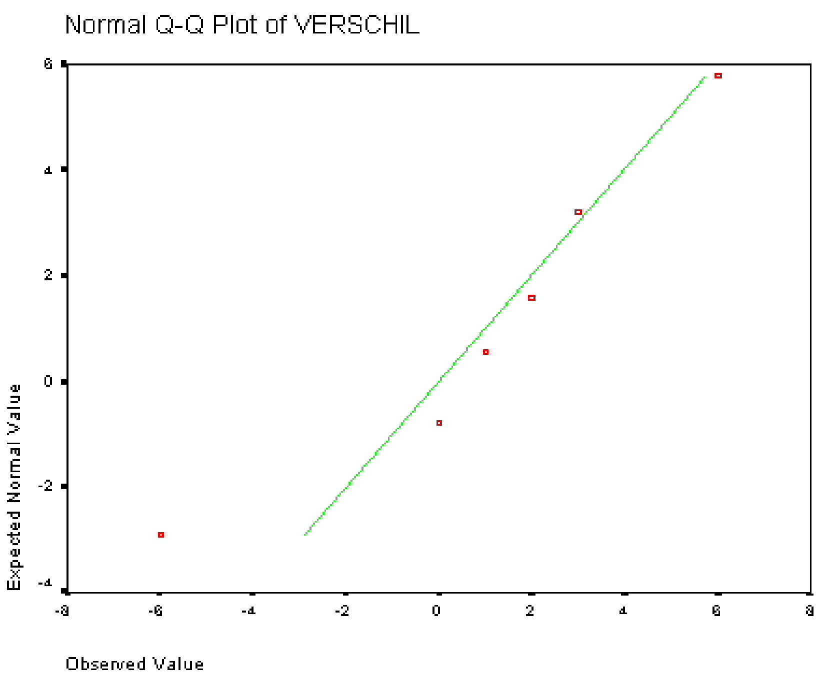
g. Geef een 90%-betrouwbaarheidsinterval voor het verschil in de gemiddelden van de score 'vooraf' van groep 1 en de score 'vooraf' van groep 2. Ga er van uit dat de standaarddeviaties van beide populaties gelijk zijn.

h. Is er een significant verschil tussen de gemiddelde score Vooraf van groep 1 en de gemiddelde score Vooraf van groep 2? Formuleer de geschikte H_0 en H_a. Ga er van uit dat de standaarddeviaties van beide populaties gelijk zijn.

Opdracht 10a - berekening

Beschouw voor b. en c. het kader op bladzijde 414, voor e. en f. het kader op bladzijde 440 en voor g. en h. het kader op blz 452.

a.



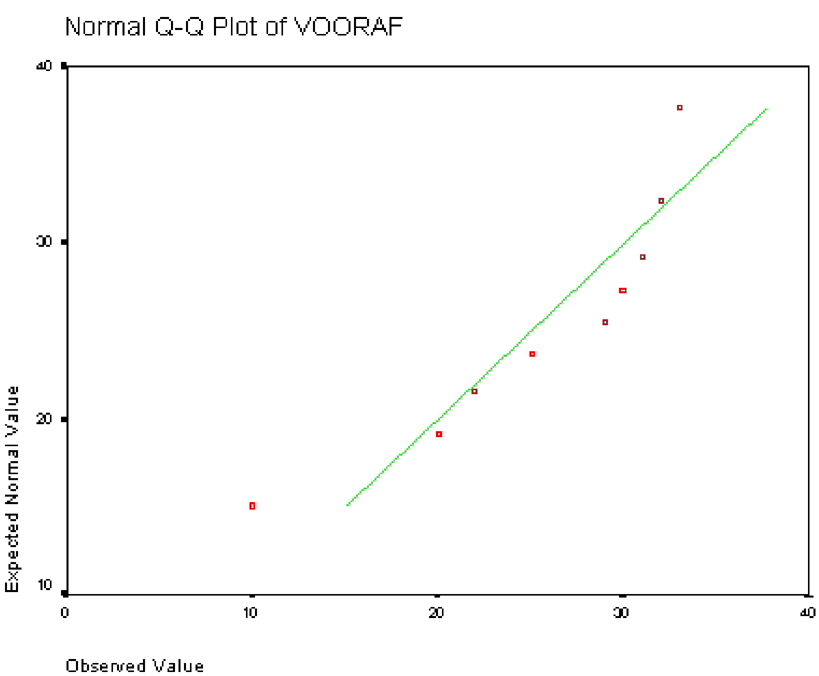
b. Bepaal eerst voor elke leraar de vooruitgang door de score vooraf af te trekken van de score achteraf. Bepaal op basis van deze verschilwaarden dat x_gemiddeld=2.5 en s=2.893.

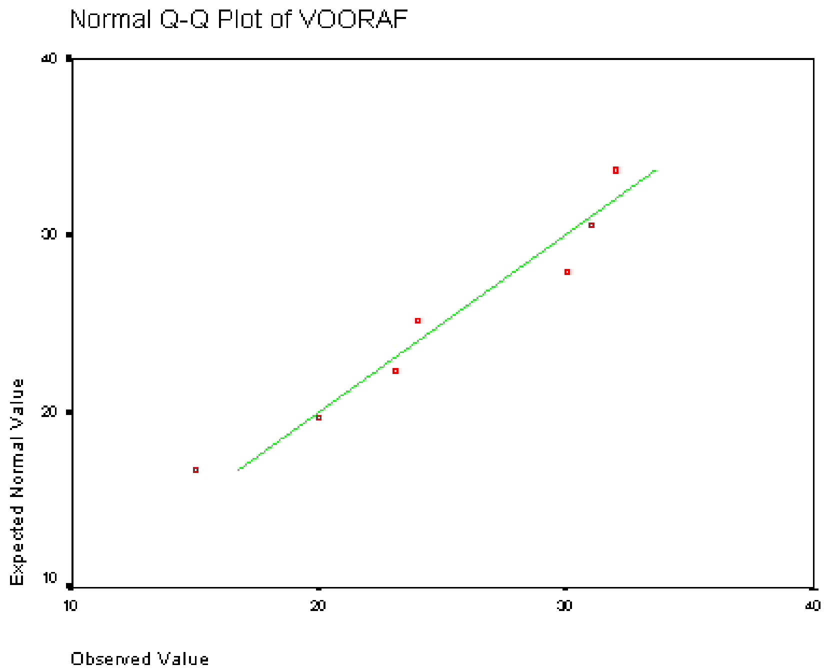
Bepaal vervolgens t*. We hebben n-1 = 20-1 = 19 vrijheidsgraden. Tabel E geeft voor 90% t* = 1.729.

Het betrouwbaarheidsinterval is:

```
                            s
x_gemiddeld +/- t_ster * --------- =
                          sqrt(n)


                          2.893
2.5         +/- 1.729  * --------- =
```

```
                              sqrt(20)

   2.5         +/- 1.12              =

   (1.38,3.62)

c. H_0: muu=0
   H_a: muu>0

   De t-grootheid is

       x_gemiddeld - muu_0
   t = -------------------
           s / sqrt(n)

          2.5 - 0
     = -------------------
        2.893 / sqrt(20)

     = 3.86

   Als H_a: muu > muu_0, dan de P-waarde is P(T>=t). In tabel E is gegeven
   P(T>=t). Voor P(T>=3.86) en 19 vrijheidsgraden zien we dat t ligt tussen
   3.579 en 3.883, en p ligt tussen 0.001 en 0.0005. Er geldt P(T>=3.86) =
   0.0005 < p < 0.001.

d.
```





e. We bepalen eerst voor beide steekproeven x_gemiddeld en s. We krijgen dan de volgende gegevens:

Groep	n	x_gemiddeld	s
groep 1	10	26.4	7.291
groep 2	10	25.2	5.473

Het aantal vrijheidsgraden is gelijk aan:

```
min(n1-1,n2-1) =
min(10-1,10-1) =
min(9,9)       = 9
```

Vervolgens bepalen we t*. Tabel E geeft voor 90% t* = 1.833.

Het betrouwbaarheidsinterval is:

```
                                                 sqr(s1)   sqr(s2)
(x_gemiddeld_1-x_gemiddeld_2) +/- t_ster * sqrt(------- + -------) =
                                                    n1        n2

                                  sqr(7.291)   sqr(5.473)
(26.4-25.2) +/- 1.833 * sqrt(---------- + ----------) =
                                      10           10

1.20 +/- 5.284

(-4.084,6.484)
```

f. H_0: muu1 =muu2
H_a: muu1<>muu2

De t-grootheid is

$$t = \frac{x\_gemiddeld\_1 - x\_gemiddeld\_2}{(sqrt(\frac{sqr(s1)}{n1} + \frac{sqr(s2)}{n2}))}$$

$$= \frac{(26.4-25.2)}{(sqrt(\frac{sqr(7.291)}{10} + \frac{sqr(5.473)}{10}))}$$

$$= 0.42$$

Als H_a: muu_1 <> muu_2, dan de P-waarde is 2P(T>=|t|). In tabel E is gegeven P(T>=t). Voor P(T>=0.42) en 9 vrijheidsgraden zien we dat t kleiner is dan 0.703, en dat p groter is dan 0.25. Er geldt dat 2P(T>=|t|) = 2 * P(T>=t) = 2(p>0.25) = p>0.50.

g. We bepalen eerst voor beide steekproeven x_gemiddeld en s. We krijgen dan de volgende gegevens:

Groep	n	x_gemiddeld	s
groep 1	10	26.4	7.291
groep 2	10	25.2	5.473

Het aantal vrijheidsgraden is gelijk aan:

min(n1-1,n2-1) =
min(10-1,10-1) =
min(9,9) = 9

Vervolgens bepalen we t*. Tabel E geeft voor 90% t* = 1.833.

De samengestelde steekproefvariantie is:

$$sqr(s\_p) = \frac{(n1-1)*sqr(s1) + (n2-1)*sqr(s2)}{n1+n2-2}$$

$$= \frac{(9-1)*sqr(7.291) + (20-1)*sqr(5.473)}{10+10-2}$$

$$= 41.56$$

De samengestelde steekproefstandaardeviatie is dan:

$$s\_p = sqrt(41.56)$$

$$= 6.45$$

Het betrouwbaarheidsinterval is:

$$(x\_gemiddeld\_1-x\_gemiddeld\_2) +/- t\_ster * s\_p * sqrt(\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}) =$$

1 1

```
   (26.4-25.2) +/- 1.833 * 6.45 * sqrt(--- + ---) =
                                        10    10

   1.20 +/- 5.287

   (-4.087,6.487)
```

h. H_0: muu1=muu2
   H_a: muu1>muu2

   De t-grootheid is

```
        x_gemiddeld_1 - x_gemiddeld_2
   t = -------------------------------
                         1     1
           s_p * (sqrt(--- + ---))
                         n1    n2

             (26.4-25.2)
     = -------------------------------
                        1     1
         6.45 * (sqrt(--- + ---))
                        10    10

     = 0.42
```

   Als H_a: muu_1 <> muu_2, dan de P-waarde is 2P(T>=|t|). In tabel E is gegeven P(T>=t). Voor P(T>=0.42) en 9 vrijheidsgraden zien we dat t kleiner is dan 0.703, en dat p groter is dan 0.25. Er geldt dat 2P(T>=|t|) = 2 * P(T>=t) = 2(p>0.25) = p>0.50.

Opdracht 10a - S-PLUS

Voer de gegevens in in een tabel.

a. Kies >Data >Transform. Kies onder Data Set en achter Target Columns 'verschil' als naam voor de kolom die de verschilscores gaat bevatten. Selecteer onder Add to Expression en achter Variable de variabele 'achteraf' en klik op >Add. Selecteer vervolgens achter Variable de variabele 'vooraf' en achter achter Operator de '-' en klik op >Add. Achter Expression vinden we nu als expressie: ACHTERAF - VOORAF. Klik op >OK.

   Kies >Graph >2D Plot. Kies onder Axes Type voor Linear, en onder Plot Type voor QQ Normal with Line (x). Klik op >OK. Selecteer onder Data Columns en achter y Columns de variabele 'verschil'. Klik op >OK.

Kies >Statistics >Compare Samples >Two Samples >t Test. Selecteer onder Data en achter Variable 1 de variabele 'achteraf' en achter Variable 2 de variabele 'vooraf'. Kies onder Test voor >Paired t. Onder Hypotheses en onder Mean Under Null Hypothesis moet de waarde 0 zijn gekozen, en onder Alternative Hypothesis moet 'two.sided' gekozen zijn. Geef onder Confidence Interval en achter Confidence Level de waarde 0.90. Onder Results moet >Print Results aan staan. Klik op >OK.

b. In het Report-Venster wordt onder '90 percent confidence interval' het interval gegeven: (1.381502,3.618498).

c. In het Report-Venster lezen we onder andere dat t = 3.8649 en p-value = 0.001. Omdat je rechtseenzijdig wilt toetsen (met als alternatieve hypothese: muu_achter > muu vooraf) moet de p-value nog gedeeld worden door 2.

d. Kies >Data >Split. Kies onder Splitting Variable en achter Group Column de variabele ’groep’. Onder Results moet gekozen zijn voor >Separate, en geef achter Save In ’data’ als naam. Klik op OK.

   Kies >Graph >2D Plot. Kies onder Axes Type voor Linear, en onder Plot Type voor QQ Normal with Line (x). Klik op >OK. Selecteer onder Data Columns en achter Data set de tabel ’data.1’, en achter y Columns de variabele ’vooraf’. Klik op >OK.

   Kies >Graph >2D Plot. Kies onder Axes Type voor Linear, en onder Plot Type voor QQ Normal with Line (x). Klik op >OK. Selecteer onder Data Columns en achter Data set de tabel ’data.2’, en achter y Columns de variabele ’vooraf’. Klik op >OK.

Kies >Statistics >Compare Samples >Two Samples >t Test. Selecteer onder Data en achter Data Set de oorspronkelijke tabel, achter Variable 1 de variabele ’vooraf’, en achter Variable 2 de variabele ’groep’. Zet Variable2 is Grouping Variable aan, en zet Assume Equal Variances uit. Onder Hypotheses en onder Mean Under Null Hypothesis moet de waarde 0 zijn gekozen, onder Alternative Hypothesis moet ’two.sided’ gekozen zijn. Geef onder Confidence Interval en achter Confidence Level de waarde 0.90. Onder Results moet >Print Results aan staan. Klik op >OK.

e. In het Report-Venster wordt onder ’90 percent confidence interval’ het interval gegeven: (-3.820321,6.220321).

f. In het Report-Venster lezen we onder andere dat t = 0.4162 en p-value = 0.6825.

Kies >Statistics >Compare Samples >Two Samples >t Test. Selecteer onder Data en achter Data Set de oorspronkelijke tabel, achter Variable 1 de variabele ’vooraf’, en achter Variable 2 de variabele ’groep’. Zet Variable2 is Grouping Variable aan, en zet Assume Equal Variances aan. Onder Hypotheses en onder Mean Under Null Hypothesis moet de waarde 0 zijn gekozen, onder Alternative Hypothesis moet ’two.sided’ gekozen zijn. Geef onder Confidence Interval en achter Confidence Level de waarde 0.90. Onder Results moet >Print Results aan staan. Klik op >OK.

g. In het Report-Venster wordt onder ’90 percent confidence interval’ het interval gegeven: (-3.799132,6.199132).

h. In het Report-Venster lezen we onder andere dat t = 0.4162 en p-value = 0.6821.

Opdracht 10a - SPSS

Voer de gegevens in in een tabel.

a. Kies >Transform >Compute. Geef onder Target Variabele ’verschil’ als naam voor de kolom die de verschilscores gaat bevatten. Klik op de variabele ’achteraf’ en vervolgens op > (pijltje naar rechts). Klik op de ’-’-toets en vervolgens op ^ (pijltje naar boven). Klik op de variabele ’vooraf’ en vervolgens op > (pijltje naar rechts). Klik op >OK.

   Kies >Graphs >Q-Q. Plaats zowel ’verschil’ onder Variables. Klik op >OK. In het output-window vind je achtereenvolgens twee grafieken. De grafiek

’Normal Q-Q Plot of verschil’ is de eerste grafiek. Dit is de grafiek die gevraagd wordt.

Kies >Statistics >Compare Means >Paired-Samples T Test. Selecteer ’Vooraf’ en ’Achteraf’ en plaats ze gezamenlijk in Paired Variables door te klikken op > (pijltje naar rechts). Klik op >Options. Kies als Confidence Interval 90%. Klik op >Continue. Klik vervolgens op >OK. In het output-window vind je drie tabellen. De tabel ’Paired Samples Test’ is de derde tabel en in deze tabel vinden we de resultaten die we willen hebben.

b. In de tabel vind je onder ’90% Confidence Interval of the Difference’ ’Lower’ en ’Upper’. Deze geven respectievelijk de onder- en de bovengrens van het betrouwbaarheidsinterval aan (1.3815,3.6185).

c. Onder ’t’ vinden we de t-grootheid. Deze is gelijk aan 3.865. Onder ’Sig. (2-tailed)’ vinden we de tweezijdige P-waarde van 0.001. Omdat we de rechtseenzijdige P-waarde willen hebben moeten we deze waarden delen door 2. We krijgen dan 0.0005.

d. Selecteer de scores van groep 1. Kies >Data >Select Cases. Je komt nu in het window ’Select Cases’. Klik op het rondje voor >If condition is satisfied. Klik vervolgens op >If. Je komt nu in het window ’Select Cases: If’. Breng ’groep’ naar rechts, klik op ’=’ en klik op ’1’. Klik daarna op >Continue en tenslotte op >OK.

   Kies vervolgens >Graphs >Q-Q. Klik op >Reset. Plaats ’vooraf’ onder Variables. Klik op >OK. In het output-window vind je achtereenvolgens twee grafieken. De grafiek ’Normal Q-Q Plot of Vooraf’ is de eerste grafiek. Deze grafiek is de grafiek die gevraagd wordt.

   Selecteer de scores van groep 2. Kies >Data >Select Cases. Je komt nu in het window ’Select Cases’. Klik op >Reset. Klik daarna op het rondje voor >If condition is satisfied. Klik vervolgens op >If. Je komt nu in het window ’Select Cases: If’. Breng ’groep’ naar rechts, klik op ’=’ en klik op ’2’. Klik daarna op >Continue en tenslotte op >OK.

   Kies vervolgens >Graphs >Q-Q. Klik op >Reset. Plaats ’vooraf’ onder Variables. Klik op >OK. In het output-window vind je achtereenvolgens twee grafieken. De grafiek ’Normal Q-Q Plot of Vooraf’ is de eerste grafiek. Deze grafiek is de grafiek die gevraagd wordt.

Maak eerst de selectie ongedaan. Kies >Data >Select Cases. Je komt nu in het window ’Select Cases’. Klik op >Reset. Klik op >OK.

Kies vervolgens >Statistics >Compare Means >Independent-Samples T Test. Plaats ’vooraf’ in ’Test Variable(s)’ en ’groep’ in ’Grouping Variable’. Klik op >Define Groups. Vul bij ’Group 1’ de waarde 1 in (groep 1) en bij ’Group 2’ de waarde 2 in (groep 2). Klik op >Continue. Klik nu op >Options. Geef als ’Confidence Interval’ 90% op. Klik op >Continue en vervolgens op >OK.

De tabel ’Independent Samples Test’ is de tweede tabel en in deze tabel vinden we de resultaten die we willen hebben.

e. In rij ’Equal variances not assumed’ en kolom ’90% Confidence Interval of the Difference’ vind je het betrouwbaarheidsinterval (-3.8203, 6.2203).

f. In rij ’Equal variances not assumed’ vind je onder ’t’ de t-grootheid (0.416) en onder ’Sig. (2-tailed)’ de tweezijdige P-waarde: 0.683.

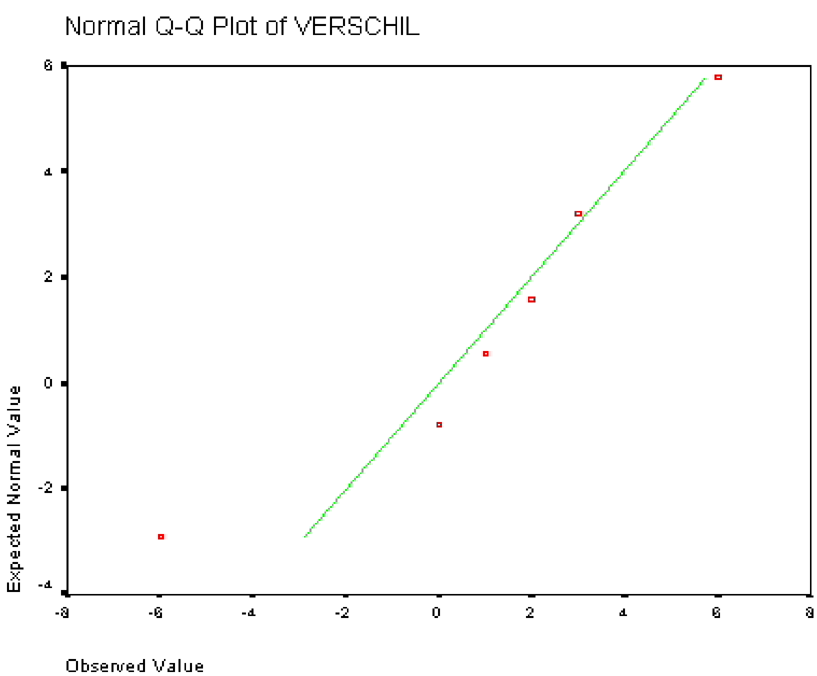
g. In rij 'Equal variances assumed' en kolom '90% Confidence Interval of the Difference' vind je het betrouwbaarheidsinterval (-3.7991,6.1991).

h. In rij 'Equal variances assumed' vind je onder 't' de t-grootheid (0.416) en onder 'Sig. (2-tailed)' de tweezijdige P-waarde: 0.682.

Opdracht 10a - verslag

Twee groepen van 10 leraren Frans volgden een intensieve zomercursus Frans. Zowel voor als na de cursus maakten zij een luistertoets.

a. Teken een normaal-kwantiel-plot voor de verschilscores achteraf-vooraf.



Wanneer het aantal paren minstens 15 en kleiner dan 40 is, mag de t-procedure voor gekoppelde paren gebruikt worden, behalve in het geval van uitschieters of scheefheid. Bij de verschilscores zijn er geen uitschieters en is geen sprake van scheefheid. We mogen de t-toets hier dus gebruiken.

b. Geef een 90%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde toename van de score bij de luistertoets, een toename die te danken is aan het bijwonen van de zomercursus. Maak hierbij geen onderscheid tussen groep 1 en groep 2.

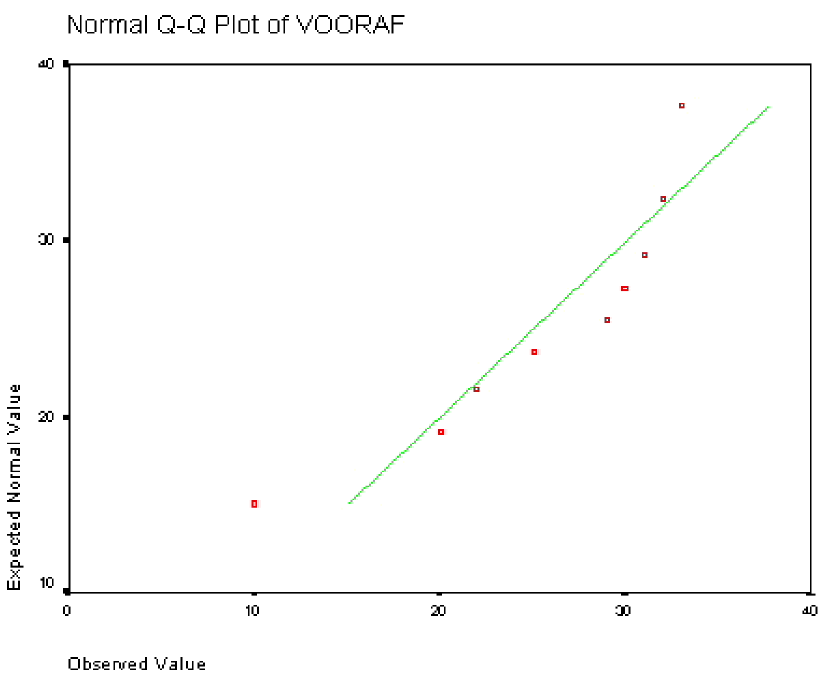
Het betrouwbaarheidsinterval is (1.3815,3.6185). We kunnen met 90% zekerheid stellen dat de gemiddelde toename ligt tussen 1.3815 en 3.6185.

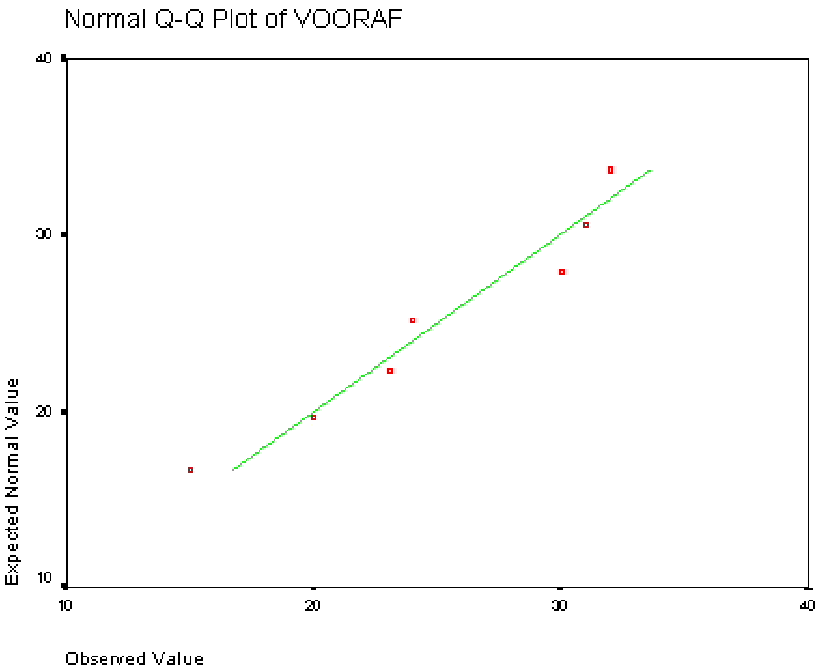
c. Is de verbetering in de scores significant? Formuleer de geschikte H_0 en H_a. Maak ook hierbij geen onderscheid tussen groep 1 en groep 2.

H_0: muu = 0 (het gemiddelde van de verschillen is gelijk aan 0)
H_a: muu > 0 (het gemiddelde van de verschillen is groter dan 0)

De t-waarde is gelijk aan 3.865 en de bijbehorende tweezijdige P-waarde is gelijk aan 0.001. Omdat we alleen geinteresseerd zijn in de verbetering, willen we de rechtseenzijdige P-waarde hebben. Deze krijgen we door de tweezijdige P-waarde te delen door twee: 0.001/2 = 0.0005. De kans, berekend onder de aanname dat H_0 waar is, dat de toetsingsgrootheid t een waarde zou aannemen die even extreem is als of nog extremer is dan 3.865, is gelijk aan 0.0005. Hoe kleiner de P-waarde, hoe sterker het door de data tegen H_0 geleverde bewijs. De P-waarde is kleiner dan alfa, want 0.0005<0.05, dus wordt H_0 verworpen. Er is sprake van een verbetering.

d. Teken een normaal-kwantiel-plot voor de scores vooraf van groep 1 en teken een normaal-kwantiel-plot voor de scores vooraf van groep 2.





Wanneer de som van het aantal waarnemingen in beide steekproeven minstens 15 en kleiner dan 40 is, mag de t-procedure voor twee onafhankelijke steekproeven gebruikt worden, behalve in het geval van uitschieters of scheefheid. Zowel bij de scores vooraf van groep 1 als van groep 2 zijn er geen uitschieters en is geen sprake van scheefheid. We mogen de t-toets hier dus gebruiken.

e. Geef een 90%-betrouwbaarheidsinterval voor het verschil in de gemiddelden van de score 'vooraf' van groep 1 en de score 'vooraf' van groep 2. Ga er van uit dat de standaarddeviaties van beide populaties niet gelijk zijn.

   Als we er van uitgaan dat de standaarddeviaties van beide populaties niet gelijk zijn is het betrouwbaarheidsinterval (-3.8203,6.2203). We kunnen met 90% zekerheid stellen dat het verschil in de gemiddelden van de score 'vooraf' van groep 1 en de score 'vooraf' van groep 2 ligt tussen -3.8203 en 6.2203.

f. Is er een significant verschil tussen de gemiddelde score Vooraf van groep 1 en de gemiddelde score Vooraf van groep 2? Formuleer de geschikte H_0 en H_a. Ga er van uit dat de standaarddeviaties van beide populaties niet gelijk zijn.

   H_0: muu_groep1 = muu_groep2
   H_a: muu_groep1 <> muu_groep2

   Als we er van uitgaan dat de standaarddeviaties van beide populaties niet gelijk zijn, is de t-waarde gelijk aan 0.416 en de bijbehorende tweezijdige P-waarde gelijk aan 0.683. We willen ook inderdaad tweezijdig toetsen, want we willen slechts toetsen of de groepen significant verschillend zijn. De kans, berekend onder de aanname dat H_0 waar is, dat de toetsingsgrootheid t een waarde zou aannemen die even extreem is als of nog extremer is dan 0.416, is gelijk aan 0.683. Hoe kleiner de P-waarde, hoe sterker het door de data tegen H_0 geleverde bewijs. De P-waarde is groter dan alfa, want 0.683>0.05, dus wordt H_0 niet verworpen. Er is geen bewijs dat de populaties significant verschillend zijn.

g. Geef een 90%-betrouwbaarheidsinterval voor het verschil in de gemiddelden van de score ’vooraf’ van groep 1 en de score ’vooraf’ van groep 2. Ga er van uit dat de standaarddeviaties van beide populaties niet gelijk zijn.

   Als we er van uitgaan dat de standaardeviaties van beide populaties gelijk zijn is het betrouwbaarheidsinterval (-3.7991,6.1991). We kunnen met 90% zekerheid stellen dat het verschil in de gemiddelden van de score ’vooraf’ van groep 1 en de score ’vooraf’ van groep 2 ligt tussen -3.7991 en 6.1991.

h. Is er een significant verschil tussen de gemiddelde score Vooraf van groep 1 en de gemiddelde score Vooraf van groep 2? Formuleer de geschikte H_0 en H_a. Ga er van uit dat de standaarddeviaties van beide populaties niet gelijk zijn.

   H_0: muu_groep1 = muu_groep2
   H_a: muu_groep1 <> muu_groep2

   Als we er van uitgaan dat de standaardeviaties van beide populaties gelijk zijn, is de t-waarde gelijk aan 0.416 en de bijbehorende tweezijdige P-waarde gelijk aan 0.682. We willen ook inderdaad tweezijdig toetsen, want we willen slechts toetsen of de groepen significant verschillend zijn. De kans, berekend onder de aanname dat H_0 waar is, dat de toetsingsgrootheid t een waarde zou aannemen die even extreem is als of nog extremer is dan 0.416, is gelijk aan 0.682. Hoe kleiner de P-waarde, hoe sterker het door de data tegen H_0 geleverde bewijs. De P-waarde is groter dan alfa, want 0.682>0.05, dus wordt H_0 niet verworpen. Er is geen bewijs dat de populaties significant verschillend zijn.