Opdracht 8a_1

Betrouwbaarheidsintervallen

Onderzoekers plannen een studie van de leesvaardigheidheid van achtjarigen. Ze verrichten een klein proefonderzoek om de variabiliteit van de toetsscores te schatten. In het proefonderzoek is de standaardafwijking van de steekproef s=12 punten, en daarom gaan de onderzoekers bij de eerste berekeningen uit van een standaardafwijking in de populatie van sigma=12. Het steekproefgemiddelde x_gemiddelde=26 punten. Het onderzoeksbudget maakt het mogelijk 100 leerlingen te kiezen.

a. Geef z_ster voor een 95%-betrouwbaarheidsinterval.

b. Geef het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor x.

c. Geef het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor muu.

d. Bepaal het minimum aantal leerlingen op basis waarvan de studie moet worden uitgevoerd wanneer men wil voldoen aan de eis van een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een foutenmarge van 5 punten of minder.

Opdracht 8a_1 - berekening en verslag

Onderzoekers plannen een studie van de leesvaardigheidheid van achtjarigen. Ze verrichten een klein proefonderzoek om de variabiliteit van de toetsscores te schatten. In het proefonderzoek is de standaardafwijking van de steekproef s=12 punten, en daarom gaan de onderzoekers bij de eerste berekeningen uit van een standaardafwijking in de populatie van sigma=12. Het steekproefgemiddelde x_gemiddelde=26 punten. Het onderzoeksbudget maakt het mogelijk 100 leerlingen te kiezen.

Beschouw hierbij het kader op bladzijde 355 en het kader op bladzijde 359.

a. Geef z_ster voor een 95%-betrouwbaarheidsinterval.

We berekenen eerst de ondergrens en de bovengrens in de standaardnormale verdeling via tabel A. Als het een betrouwbaarheidsinterval betreft van 95%, dan geldt: C=0.95.

De ondergrens is een z-waarde met links daarvan onder de standaardnormale kromme de kans (de oppervlakte) (1-C)/2 = (1-0.95)/2 = 0.025. In tabel A zoeken we P(Z<=-z_ster) = 0.025. We zien dat -z_ster = -1.96.

De bovengrens is een z-waarde met links daarvan onder de standaardnormale kromme de kans (de oppervlakte) (1-C)/2 + C = (1-0.95)/2 + 0.95 = 0.975. We zien dat z_ster = 1.96.

De berekening van de ondergrens en de bovengrens in de standaardnormale verdeling gaat sneller via tabel D. Uit tabel D zien we voor een betrouwbaarheidsinterval van 95% dat z_ster = 1.960.

b. Geef het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor x.

We berekenen een betrouwbaarheidsinterval op basis van een losse waarneming x. De kans dat x ligt tussen:

muu - (z_ster * sigma) en muu + (z_ster * sigma) is 0.95. Dat is precies hetzelfde als zeggen dat de onbekende muu met 95% zekerheid ligt tussen:

$$x - (z\_ster * sigma) \text{ en } x + (z\_ster * sigma)$$

Gegeven is: x=26 punten. De grenzen van het interval zijn nu:

$$(26 - (1.960 * 12)) = 2.48 \text{ en } (26 + (1.960 * 12)) = 49.52$$

We hebben er 95% vertrouwen in dat een waarde x ligt tussen 2.48 en 49.52.

c. Geef het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor muu.

We berekenen een betrouwbaarheidsinterval op basis van een steekproefgemiddelde x_gemiddelde. De kans dat x_gemiddelde ligt tussen:

$$muu - (z\_ster * \frac{sigma}{sqrt(n)}) \text{ en } muu + (z\_ster * \frac{sigma}{sqrt(n)})$$

is 0.95. Dat is precies hetzelfde als zeggen dat de onbekende muu met 95% zekerheid ligt tussen:

$$x\_gemiddelde - (z\_ster * \frac{sigma}{sqrt(n)}) \text{ en } x\_gemiddelde + (z\_ster * \frac{sigma}{sqrt(n)})$$

Gegeven is: x=26 punten. De grenzen van het interval zijn nu:

$$(26 - (1.960 * \frac{12}{sqrt(100)})) = 2.48 \text{ en } (26 + (1.960 * \frac{12}{sqrt(100)})) = 49.52$$

We hebben er 95% vertrouwen in dat de werkelijke gemiddelde score ligt tussen 23.65 en 28.35.

d. Bepaal het minimum aantal leerlingen op basis waarvan de studie moet worden uitgevoerd wanneer men wil voldoen aan de eis van een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een foutenmarge van 5 punten of minder.

Voor 95% betrouwbaarheid geeft tabel D z_ster = 1.960. De foutenmarge is m=5.

Als geldt:

$$z = \frac{x\_gemiddelde - muu}{sigma / sqrt(n)} \quad \text{en } m = x\_gemiddelde$$

dan volgt daaruit:

$$n = sqr(\frac{z\_ster * sigma}{m}) = sqr(\frac{1.960 * 12}{5}) = 22.13$$

Afronden naar boven geeft: 23

Opdracht 8a_2

Significantietoetsen

Men weet dat sonnetten van een Elizabethaanse dichter gemiddelde muu = 6.9 nieuwe woorden bevatten (woorden die niet in een ander werk van de dichter zijn gebruikt). De standaardafwijking van het aantal nieuwe woorden is sigma = 2.7. Nu is er een manuscript ontdekt met 5 nieuwe sonetten, en dat geleerden vragen zich af of die van deze dichter zijn. De nieuwe sonetten bevatten het gemiddelde x_gemiddelde = 8.2 aan woorden die niet in de bekende werken van de dichter voorkomen.

a. We willen toetsen of er bewijs is dat de nieuwe sonnetten niet van onze dichter zijn. Formuleer H_0 en H_a.

b. Geef de toetsingsgrootheid z.

c. Bepaal de P-waarde. Wat is uw conclusie over het auteurschap van de nieuwe sonnetten?

d. Is de z-waarde significant op het 5%-niveau (alfa = 0.05)?

Opdracht 8a_2 - berekening en verslag

Men weet dat sonnetten van een Elizabethaanse dichter gemiddelde muu = 6.9 nieuwe woorden bevatten (woorden die niet in een ander werk van de dichter zijn gebruikt). De standaardafwijking van het aantal nieuwe woorden is sigma = 2.7. Nu is er een manuscript ontdekt met 5 nieuwe sonetten, en dat geleerden vragen zich af of die van deze dichter zijn. De nieuwe sonetten bevatten het gemiddelde x_gemiddelde = 8.2 aan woorden die niet in de bekende werken van de dichter voorkomen.

Beschouw hierbij het kader op bladzijde 375 en het kader op bladzijde 379.

a. We willen toetsen of er bewijs is dat de nieuwe sonnetten niet van onze dichter zijn. Formuleer H_0 en H_a.

H_0: muu = 6.9
H_a: muu > 6.9

b. Geef de toetsingsgrootheid z.

```
          x_gemiddelde - muu_0          8.2 - 6.9
      z = -------------------- = -------------------- = 1.07
             sigma / sqrt(n)          2.7 / sqrt(5)
```

c. Bepaal de P-waarde. Wat is uw conclusie over het auteurschap van de nieuwe sonnetten?

Als H_a : muu > muu_0, dan de P-waarde is P(Z>=z). In tabel A is gegeven P(Z<=1.07). Er geldt:

```
P(Z>=1.07) = 1 - P(Z<= 1.07) = 1 - 0.8577 = 0.1423
p(Z>=1.07) =     P(Z<=-1.07)              = 0.1423
```

De P-waarde is gelijk aan 0.1423. De kans, berekend onder de aanname dat H_0 waar is, dat de toetsingsgrootheid z een waarde zou aannemen die even extreem is als of nog extremer is dan 1.07, is gelijk aan 0.1423. Hoe kleiner de P-waarde, hoe sterker het door de data tegen H_0 geleverde bewijs. De P-waarde is groter dan alfa, want 0.1423>0.05, dus wordt H_0 aangenomen. Er is geen bewijs dat de nieuwe sonetten niet van onze dichter zijn.

d. Is de z-waarde significant op het 5%-niveau (alfa = 0.05)?

We berekenen z_ster eerst via tabel A. Omdat H_a : muu > muu_0, toetsen we rechtseenzijdig. Er geldt: P(Z >= z_ster) = alfa. Dan geldt ook: 1-P(Z <= z_ster) = alfa. Hieruit volgt: P(Z <= z_ster) = 1 - alfa = 1 - 0.05 = 0.95. We zien in tabel A dat z_ster = 1.645.

We vinden z_ster sneller via tabel D. Als alfa=0.05, dan z_ster = 1.645 volgens tabel D.

Als H_a : muu > muu_0, dan wordt H_0 verworpen indien z >= z_ster. Er geldt: z < z_ster, want 1.07 < 1.645, dus H_0 wordt niet verworpen. Dus de waargenomen x_gemiddelde = 8.2 is niet significant op niveau alfa= 0.05.